Παράδειγμα

Υπολογισμός του π με τη μέθοδο του Αρχιμήδη

Θεωρώ την ακολουθία $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με

$$y_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}, \quad n\in\mathbb{N}$$

Γνωρίζουμε (?) ότι η ακολουθία συγκλίνει, γιατί

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} = \lim \frac{\sin(2^{-n}\pi)}{(2^{-n})} = \pi$$

και $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x} = a$

Ζητάμε να γράψουμε αυτή την ακολουθία ως αναδρομικό τύπο $y_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} = 2^n \sin\frac{2\pi}{2^{n+1}} = 2^n \sin\left(2\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) =$

(Θυμάμαι ότι $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$)

$$= \underbrace{2^n \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= \left(2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= y_{n+1}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= y_{n+1}\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$= y_{n+1}\sqrt{1-\left(\frac{y_{n+1}}{2^{n+1}}\right)^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \\ \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ y_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} \\ y_{n+1} = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \Longrightarrow \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{y_{n+1}}{2^{n+1}} \end{array}}$$

$$y_n = y_{n+1}\sqrt{1-\left(\frac{y_{n+1}}{2^{n+1}}\right)^2}$$

$$y_n^2 = y_{n+1}^2\left(1-\frac{y_{n+1}^2}{2^{2n+2}}\right) \Longrightarrow y_{n+1}^2 - \frac{y_{n+1}^4}{2^{2n+2}} = y_n^2$$

"Άγνωστος" y_{n+1}

Γράφω την ακολουθία σε αναδρομική μορφή

$$y_1 = 2 , \quad y_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\right]}$$

Αν χρησιμοποιήσω αυτή τη μέθοδο θα διαπιστώσω ότι ο αλγόριθμος είναι ασταθής. Γιατί;

Θεωρούμε ότι καθώς $n \to \infty$ $y_n \to \pi$, δηλ. γνωρίζω ότι το όριο είναι πεπερασμένο ενώ η ποσότητα $2^{-n}y_n = \frac{y_n}{2^n} \to 0$

Άρα κοιτώντας το εσωτερικό ριζικό

$$1-\sqrt{1-\left(\frac{y_n}{2^n}\right)^2} \overset{n\ \text{μεγάλο}}{\approx} 1-\sqrt{1} = 0$$

Για μεγάλα n αφαιρούμε συνεχώς σχεδόν ίσους αριθμούς $(1-\sqrt{1})$.

Προσπαθούμε να κάνουμε τον αλγόριθμο ευσταθή

$$1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2} = \frac{\left(1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\right)\left(1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\right)}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}$$

$$= \frac{2^{-2n}y_n^2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n^2)}}$$

Όμως $y_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}$

$$= 2^{n+1}\ \frac{2^{-2n}y_n^2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}} =$$

$$= 2\ \frac{y_n}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}$$

<u>Check</u>: $n \to \infty$ $y_n \to \pi$

$y_{n+1} \to \pi$

Βλέπουμε το ζήτημα γενικά. Θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $S_n = \sum_{n=1}^{k} a_n$ με τον αλγόριθμο $S_1 = a_1$, $S_k = S_{k-1} + a_k$, $k = 2, 3, \ldots$

Συνεπώς οι υπολογισμένοι μας είναι

$S_1^* = a_1$

$S_2^* = S_1 + a_2 = (S_1^* + a_2)(1+\varepsilon) = (a_1 + a_2)(1+\varepsilon_1) =$
$a_1(1+\varepsilon_1) + a_2(1+\varepsilon_2)$

$S_3^* = (S_2^* + a_3)(1+\varepsilon_2) =$

$S_4^* = (S_3^* + a_4)(1+\varepsilon_3)$
$= a_1(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3) + a_2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$
$+ a_3(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) + a_4(1+\varepsilon_3)$

Ορίζω ποσότητες $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ώστε

$S_4^* = a_1(1+\delta_1)^3 + a_2(1+\delta_1)^3 + a_3(1+\delta_2)^2 + a_4(1+\delta_3)$
$\approx a_1(1+3\delta_1) + a_2(1+3\delta_1) + a_3(1+2\delta_2) + a_4(1+\delta_3)$
$= S_4 + (3\delta_1)a_1 + (3\delta_1)a_2 + (2\delta_2)a_3 + \delta_3 a_4$

Έστω και χονδρικά έχω μια συνολική εικόνα του σφάλματος. Δηλ. αν a_n είναι είναι θετικοί και διαφορετικοί μεταξύ τους και $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$. Τα πιο μεγάλα συσσωρευμένα σφάλματα πολ/ζουν τους μεγαλύτερους όρους. Αντίθετα αν $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ έχω την ανάποδη κατάσταση.